Adı Soyadı:
Numarası:

02.12.2021

2021-2022 GÜZ DÖNEMİ CEBİR I ARA SINAV SORULARI

1) a) a ve b tam sayıları için $a \equiv b \pmod{m}$ olsun. Bu durumda a'nın m ile bölümünden kalan r ise b'nin de m ile bölümünden kalanın r olduğunu gösteriniz.

b) $371x \equiv 91 \pmod{133}$ kongrüansının çözümü varsa bulunuz.

2) a) 17^{117} sayısının son iki basamağını bulunuz.

b)
$$\begin{aligned} 3x &\equiv 2 \pmod{8} \\ 5x &\equiv 7 \pmod{9} \\ x &\equiv 4 \pmod{7} \end{aligned}$$

kongrüans sisteminin çözümü varsa bulunuz.

3) 7948^{7948} sayısının 97 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.

4) a) $\mathbb{Z}_{10}^{*}$ grubunda mertebesi $|\mathbb{Z}_{10}^{*}|$ olan bir eleman bulunuz.

b) $(H,*)$ bir değişmeli grup ve $K = \{k \in H : \forall x \in H \text{ için } k^{-1}x = kx\}$ olsun. Bu durumda K, H'nın bir alt grubu olur mu? Araştırınız.

5) a) $(G,*)$ sonlu yarı grup olsun. Bu yarı grupta soldan ve sağdan kısaltma özelliği sağlanıyorsa $(G,*)$'ın bir grup olduğunu gösteriniz.

b) G bir grup H ve K, G'nin iki alt grubu olsun. HK, G'nin alt grubu ise $HK = KH$ olduğunu gösteriniz.

BAŞARILAR
Prof. Dr. Şenol EREN

Cebir 1 Ara-Sınav Cevap Anahtarı

1) a) $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a-b$

$\Leftrightarrow a-b=mk_1$ o.ş $k_1 \in \mathbb{Z}$ var

$\Leftrightarrow a=b+mk_1$

a'nın m ile bölümünden kalan r ise $a \equiv r \pmod{m}$ yazılabilir. O halde benzer şekilde

$a \equiv r \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a-r$

$\Leftrightarrow a-r=mk_2$ o.ş $k_2 \in \mathbb{Z}$ var

$\Leftrightarrow a=r+mk_2$

10p

O halde $b+mk_1 = r+mk_2 \Leftrightarrow b-r = m(\underbrace{k_2-k_1}_{\in \mathbb{Z}})$

$\Leftrightarrow m \mid b-r$

$\Leftrightarrow b \equiv r \pmod{m}$

Yani b'nin m ile bölümünden kalan r'dir.

b) $371x \equiv 91 \pmod{133}$ kongrüansı için $(371,133)=7 \mid 91$ olduğundan bu kongrüansın 7 farklı kalan sınıf çözümü vardır.

$53x \equiv 13 \pmod{19}$

$15x \equiv 13 \pmod{19}$

Öklid algoritması yöntemi ile çözelim.

$19 = 1.15+4$

$15 = 3.4+3$

$4 = 1.3+1$

$1 = 4-1.3$

$1 = 4-1.(15-3.4)$

$1 = 4.4-1.15$

$1 = 4.(19-1.15)-1.15$

$1 = 4.19-5.15$

$\times 13$: $13 = 4.13.19+(-5).(13).15$

$\overline{x} = \overline{-65} \equiv \overline{11}$ 7p

$x \equiv 11 \pmod{19} \Rightarrow x = 11+19k$

$k=0,1,2,3,4,5,6$ için bulunur 3p

$ÇK = \{\overline{11}, \overline{30}, \overline{49}, \overline{68}, \overline{87}, \overline{106}, \overline{125}\}$

2 a) 17^{117} sayısın son iki basamağını bulmak için

$$17^{117} \equiv x \pmod{100}$$ denkliğinden x'i bulmalıyız.

$$\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = \varphi(2^2)\cdot\varphi(5^2)$$
$$= (2^2-2)(5^2-5)$$
$$= 2 \cdot 20 = 40.$$

O halde $17^{120} = (17^{40})^3 \equiv 1 \ (100)$ yazılır. Sorudaki eşitliğin her iki tarafı 17^3 ile çarpılırsa

$$17^3 \cdot 17^{117} \equiv 17^3 \cdot x \pmod{100}$$
$$1 \equiv 13x \pmod{100}$$ 4p

$13x \equiv 1 \pmod{100}$ denkliğinden x'i bulmak için öklid algoritması uygulayalım.

$100 = 7 \cdot 13 + 9$
$13 = 1 \cdot 9 + 4$
$9 = 2 \cdot 4 + 1$
$4 = 1 \cdot 4 + 0$

$1 = 9 - 2 \cdot 4$
$1 = 9 - 2 \cdot (13 - 1 \cdot 9)$
$1 = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 13$
$1 = 3 \cdot (100 - 7 \cdot 13) - 2 \cdot 13$
$1 = 3 \cdot 100 - 23 \cdot 13$

$$x = \overline{-23} = \overline{77}$$ 6p

b) $3x \equiv 2 \ (8)$
$5x \equiv \cancel{7}\ (9)$
$x \equiv 4 \ (7)$

kongrüans sisteminin Çin Kalan Teoremine göre çözümünün olması için öncelikle katsayıları birim hale getirmeliyiz. $3x \equiv 2 \ (8) \implies 3^{-1} = 3 \ (8)$ olduğundan her iki tarafı 3 ile çarparsak $x \equiv 6 \ (8)$ elde edilir. Benzer şekilde $5x \equiv 3 \ (9) \implies 5^{-1} = 2 \ (9)$ olduğundan her iki tarafı 2 ile çarparsak $x \equiv 5 \ (9)$ elde edilir. O halde kongrüans sistemi

$x \equiv 6\ (8)$
$x \equiv 5\ (9)$ halıne dönüşür ve $(8,9)=(8,7)=(9,7)=1$
$x \equiv 4\ (7)$ olduğundan Çin Kalan teoremine göre bu sistemin çözümü vardır ve 504 modundadır.

$M_1 = 9.7 = 63$ olup $M_1 b_1 \equiv 1\ (8) \Rightarrow 63 b_1 \equiv 1\ (8) \Rightarrow b_1 \equiv 7\ (8)$

$M_2 = 8.7 = 56$ $\quad M_2 b_2 \equiv 1\ (9) \Rightarrow 56 b_2 \equiv 1\ (9) \Rightarrow b_2 \equiv 5\ (9)$
$(.\ 2b_2 \equiv 1\ (9))$

$M_3 = 8.9 = 72$ $\quad M_3 b_3 \equiv 1\ (7) \Rightarrow 72 b_3 \equiv 1\ (7) \Rightarrow b_3 \equiv 4\ (7)$
$(2b_3 \equiv 1\ (7))$

$$x = \sum_{i=1}^{3} M_i b_i a_i = M_1 b_1 a_1 + M_2 b_2 a_2 + M_3 b_3 a_3$$

$$x = 63.7.6 + 56.5.5 + 72.4.4$$

10P

$$x \equiv 126 + 392 + 144\ (\text{mod } 504)$$

$$x \equiv 158\ (504)$$

3) 7948^{7948} sayısının 97 ile bölümünden kalanı bulalım.

Öncelikle $7948 \equiv 91\ (97)$ yazalım. Bunun yerine $91 \equiv -6\ (97)$ yazabiliriz.

O halde soru $(-6)^{7948} \equiv x\ (97)$ denkliğinden x'i bulmaktır.

$(-6)^2 = 36$
$(-6)^3 = 75$
20P
$(-6)^4 = 35$
$(-6)^5 = 81$
$(-6)^6 = 96 = -1$

$$x = \left((-6)^6\right)^{1324} . (-6)^4 = (-1)^{1324} . (-6)^4 \equiv 35\ (97)$$

Ya da 2. Yol. $\quad \varphi(97) = 96$

$$x = \left((-6)^{96}\right)^{82} (-6)^{76} \equiv (-6)^{76} \equiv \left((-6)^6\right)^{12} . (-6)^4 \equiv 35\ (97)$$

4) a) $\mathbb{Z}_{10}^*$ grubunda mertebesi $|\mathbb{Z}_{10}^*|$ olan bir eleman için öncelikle bu kümenin elemanlarını bulalım.

$\mathbb{Z}_{10}^* = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$ ve dolayısıyla $|\mathbb{Z}_{10}^*| = 4$

$1^1 = 1$, $|1| = 1$, $\bar{3}^1 = 3$

$\bar{3}^2 = 9$

10p

$\bar{3}^3 = 7$

$\bar{3}^4 = 1 \Rightarrow |\bar{3}| = 4.$

O halde $\bar{3}$ elemanının mertebesi $|\mathbb{Z}_{10}^*|$'a eşittir.

b) $(H, *)$ bir değişmeli grup ve
$K = \{k \in H : \forall x \in H$ için $k^{-1}x = kx\}$ olsun.
K, H'nın alt grubu olur mu?

Çözüm: H bir grup old. $e \in H$ dır. $\forall x \in H$ için
$e^{-1}x = e.x$ old. $e \in K$ olup $K \neq \emptyset$ açıktır.
$K \subseteq H$ old. K'nın tanımından açıktır.
$\forall k_1, k_2 \in K$ için $k_1 k_2^{-1} \in K$ olur mu?
Yani $\forall x \in H$ için $(k_1 k_2^{-1})^{-1}.x = (k_1 k_2^{-1}).x$ olur mu?

$$(k_1 k_2^{-1})^{-1}.x \overset{H,\ \text{değişmeli}}{=} (k_1^{-1}.k_2)x = k_1^{-1}.(k_2 x) \overset{k_2 \in K}{=} k_1^{-1}.(\underbrace{k_2^{-1}.x}_{\in H})$$

$$\overset{k_1 \in K}{=} k_1 (k_2^{-1}.x)$$

10p

$$= (k_1 k_2^{-1})x$$

bulunur. Yani K, H'nın alt grubudur.

5) a) $(G,*)$ sonlu yarı grubunda soldan ve sağdan kısaltma özellikleri sağlansın. $a,b\in G$ için $a*x=b$ denklemini düşünelim. Bu denklemin G de çözümünün olduğunu göstermeliyiz
$G=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ olsun. G yarı grup olduğun-dan $a\in G$ için $a*a_i\in G$ dir. $(i=1,2,\dots,n)$
Bu takdirde $\{a*a_1,\dots,a*a_n\}\subseteq G$ $i\neq j$ için $a*a_i=a*a_j$ olsun. $a_i=a_j$ elde edilir, bu ise çelişkidir O halde $G=\{a*a_1,\dots,a*a_n\}$ olur $b\in G$ için $b=a*a_k$ olacak şekilde $a_k\in G$ vardır
Bu da $a*x=b$ denkleminin G de çözümünün

10p

olduğunu gösterir Benzer şekilde $y*a=b$ için de yapılabilir O halde ilgili teoreme göre $\forall a,b\in G$ için $a*x=b$ ve $y*a=b$ aş $\exists x,y\in G$ var ise $(G,*)$ yarı grubu grup olduğundan İspat tamamlanmış olur

b) G bir grup $H,K\leq G$ olsun.
$HK\leq G$ ise $HK=KH$ old gösterelim.
$HK\leq G$ ise $h\in H$ ve $k\in K$ için $\underline{kh\in KH}$ alalım. $\underset{\in H\,\in K}{h=h\breve{e}}$, $\underset{\in H\,\in K}{k=\breve{e}\breve{k}}$ olarak yazılabileceğinden
$h\in HK$ ve $k\in HK$ olup $\underline{kh\in HK}$ dır.

10p

elde edilir
O halde $KH\subseteq HK$ --(1)-- alalım.
Ayrıca diğer yandan $\boxed{hk\in HK}$ alalım. $HK\leq G$ olduğundan $\underline{(hk)^{-1}\in HK}$ $(hk)^{-1}=h_1k_1$ olsun
$hk=((hk)^{-1})^{-1}=(h_1k_1)^{-1}=\underline{k_1^{-1}h_1^{-1}\in KH}$ olup
$HK\subseteq KH$ --(2)-- olur (1) ve (2) den istenen eşitlik elde edilir